

数の世界 ～ 婚約数編 ～

定義 1 異なる 2 つの自然数の組で、1 と自分自身を除いた約数の総和が、互いに他方と等しくなるような組を婚約数 (*betrothed numbers, quasi-amicable numbers*) という。

今までは、完全数に代表される、約数の総和、もしくは自分自身を除いた約数の総和について見てきましたが、今回は 1 と自分自身を除いた約数の総和に注目します。1 と自分自身は必ず約数に含まれていますから、このように計算を定義するのも妥当だと考えられるでしょう。友愛数 (Math Story 13 を参考にしてください) では、自分自身を除いた約数の総和が互いに他方と等しくなる異なる 2 つの自然数の組でしたが、1 と自分自身を除いて同じことを考えたものが婚約数といわれるものです。

例えば、48 の約数は 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48 ですから、1 と自分自身を除いた約数の総和は

$$2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 12 + 16 + 24 = 75$$

また、75 の約数は 1, 3, 5, 15, 25, 75 ですから、1 と自分自身を除いた約数の総和は

$$3 + 5 + 15 + 25 = 48$$

となり、48 と 75 は婚約数となります。婚約数を小さい方から書き並べていくと、

$$(48, 75), (140, 195), (1050, 1925), (1575, 1648), (2024, 2295), (5775, 6128), (8892, 16587), \dots$$

となっています。

婚約数を見ると、偶数と奇数のペアとなっています。いつものことですが、婚約数が無限に存在するか、また、偶数同士、奇数同士のペアが存在するかは未解決問題となっています。

2 つの数の組である友愛数に対して、同じ特徴をもつ 3 つ以上の数の組を社交数 (Math Story 13 を参考にしてください) ということは以前話しました。そうすると、婚約数に対しても同じことが考えられるでしょう。

定義 2 異なる 3 つ以上の自然数の組 $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ で、 a_1 の 1 と自分自身を除いた約数の総和が a_2 に、 a_2 の 1 と自分自身を除いた約数の総和が a_3 に、というように続けていき、 a_n の 1 と自分自身を除いた約数の総和が a_1 に戻るものを *quasi-sociable numbers* という。

日本語があてられていないようですが、訳すのであれば準社交数となるでしょうか。quasi-sociable numbers の例は、

$$1215571544, 1270824975, 1467511664, 1530808335, 1579407344, 1638031815, 1727239544, 1512587175$$

などがあります。

これまで、約数の総和に注目して様々な数を見てきましたが、未解決問題がたくさん含まれていましたね。興味を持った人は、ぜひ調べてみてください。